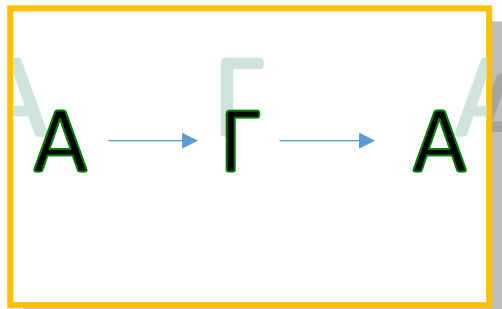


Задачи с параметрами!



Найти все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно три различных решения система уравнений

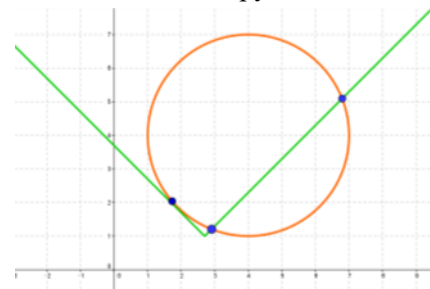
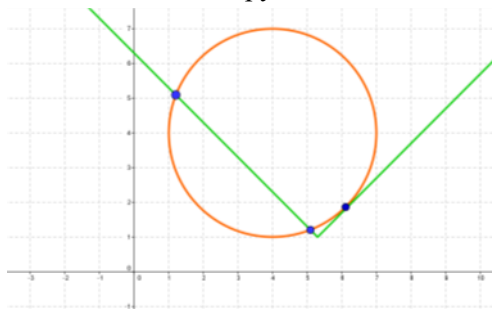
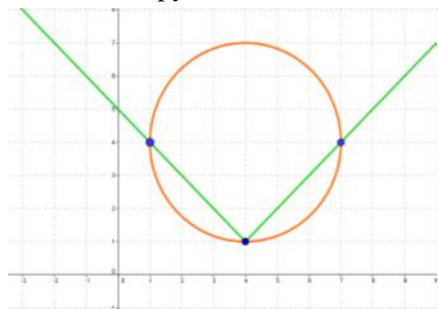
$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = |x-a| + 1. \end{cases}$$

Решение:

• **Изобразим** множества точек, описываемых первым уравнением (окружность с центром в точке (4;4) и радиусом 3) и вторым уравнением (бегающая “галочка” с центром в точке (a;1)) на координатной плоскости.

• Среди положений бегающей “галочки” **отметим** три положения, при каждом из которых будет три пересечения окружности и галочки.

• Особенность: вершина галочки • Особенность: правая ветка “галочки”-касательная к окружности. • Особенность: левая ветка “галочки”-касательная к окружности.



• Найдём соответствующие значения параметра a .

$$1) (a-4)^2 + (1-4)^2 = 9 \Leftrightarrow (a-4)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 4.$$

$$2) \begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = x-a+1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (x-a+1-4)^2 = 9, \\ y = x-a+1. \end{cases}$$

$$\checkmark (x-4)^2 + (x-a-3)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + x^2 + a^2 + 9 - 2ax - 6x + 6a = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x(14+2a) + a^2 + 6a + 16 = 0.$$

$$\checkmark \frac{D}{4} = 0 \Leftrightarrow (7+a)^2 - 2(a^2 + 6a + 16) = 0 \Leftrightarrow 17 + 14a + a^2 - 2a^2 - 12a = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 17 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \pm 3\sqrt{2}.$$

✓ Выбираем значение $a = 1 + 3\sqrt{2}$ (абсцисса вершины “галочки” ,больше четырёх).

$$3) \begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = -x+a+1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (-x+a+1-4)^2 = 9, \\ y = -x+a+1. \end{cases}$$

$$\checkmark (x-4)^2 + (x-a+3)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + x^2 + a^2 + 9 - 2ax + 6x - 6a = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x(2+2a) + a^2 - 6a + 16 = 0.$$

$$\checkmark \frac{D}{4} = 0 \Leftrightarrow (1+a)^2 - 2(a^2 - 6a + 16) = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 31 - 2a^2 + 12a = 0 \Leftrightarrow a^2 - 14a + 31 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 7 \pm 3\sqrt{2}.$$

✓ Выбираем значение $a = 7 - 3\sqrt{2}$ (ордината точки пересечения прямой $y = -x + a + 1$ с осью ординат меньше четырёх).

Ответ: $a = 4, a = 1 + 3\sqrt{2}, a = 7 - 3\sqrt{2}.$